DYNAMIQUE ARITHMÉTIQUE
MAT 661 – M2 AAG (HIVER 2021)
COMPTAGE DES POINTS PÉRIODIQUES

CHARLES FAVRE

Exercice 1. Soit $f \in \mathbb{C}(T)$ une fraction rationnelle de degré $d \geq 2$.

(1) Montrer qu'il existe $x \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ tel que $\deg_x(f) = d$ si et seulement $\sigma_1 \circ f \circ \sigma_2$ est un polynôme pour des transformations de Möbius $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathrm{PGL}(2, \mathbb{C})$.

(2) Montrer qu'il existe $x, y \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ tel que $\deg_x(f) = \deg_y(f) = d$ si et seulement $f = \sigma_1 \circ M_d \circ \sigma_2$ pour des transformations de Möbius $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathrm{PGL}(2, \mathbb{C})$ avec $M_d(z) = z^d$.

Exercice 2. Soit $f \in K(T)$ une fraction rationnelle de degré $d \geq 2$ définie sur un corps algébriquement clos de caractéristique 0.

(1) Montrer que tout point $x \in \mathbb{P}^1_K$ pour lequel la suite $\deg_x(f^n)$ est non bornée est prépériodique, et qu'il existe un point critique périodique dans l'orbite de x.

(2) Montrer que pour tout point $x \in \mathbb{P}^1_K$, la suite $\deg_x(f^n)^{1/n}$ possède une limite $e_f(x) \geq 1$.

(3) Montrer que si il existe un unique point x tel que $e_f(x) = d$, alors il existe $\sigma \in \mathrm{PGL}(2, K)$ tel que $\sigma^{-1} \circ f \circ \sigma$ est un polynôme.

(4) Montrer que si il existe deux points $x \neq x'$ tel que $e_f(x) = e_f(x') = d$, alors il existe $\sigma \in \mathrm{PGL}(2, K)$ tel que $\sigma^{-1} \circ f \circ \sigma(T) = T^{\pm d}$.

(5) Montrer que $\mathcal{E}_f = \{e_f = d\}$ ne contient qu'au plus deux points.

Exercice 3. Soit $f \in \mathbb{C}(T)$ une fraction rationnelle de degré $d \geq 1$. Pour chaque point fixe x, on note $\lambda(x)$ son multiplicateur.

(1) On suppose que $f(\infty) \neq \infty$ et que $\lambda(x) \neq 1$ pour tout point fixe. En appliquant la formule des résidus à la fraction rationnelle $g(z) = (f(z) - z)^{-1}$ montrer la formule
$$\sum_{f(x)=x} \frac{1}{\lambda(x) - 1} = 1$$

(2) Montrer que la formule précédente est encore valable sans l'hypothèse $f(\infty) \neq \infty$.

Date: 8 mars 2021.

(3) Montrer que toute fraction rationnelle complexe possède un point fixe parabolique ou répulsif.

(4) Montrer qu'il existe un polynôme de la forme $f(T) = T^2 + aT$ pour lequel il n'existe pas de point fixe répulsif.

Exercice 4. Fixons K un corps algébriquement clos de caractéristique $p > 0$, et notons $f(T) = T + T^p$.

(1) Montrer que la suite $\mu(f^{p^n}, 0)$ est non bornée.

(2) Montrer que f possède une infinité de points périodiques.

Exercice 5. Soit $f(T) = \lambda T + O(T^2)$ un germe de fonction holomorphe défini sur un voisinage de l'origine $0 \in \mathbb{C}$.

(1) On suppose que $0 < |\lambda| < 1$. Montrer qu'il existe $r > 0$ et une constante $C > 0$ tels que $|f(z) - \lambda z| \ \leq C|z|^2$ pour tout $|z| < r$.

(2) En déduire qu'il existe $0 < |\lambda'| < |\lambda|^{1/2}$ tel que pour tout z assez proche de 0 et pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $|f^n(z)| \leq C(\lambda')^n$.

(3) Montrer que la suite $\psi_n(z) := \lambda^{-n} f^n(z)$ converge uniformément sur un disque $\mathbb{D}(0, r')$ vers une fonction holomorphe $\psi(z) = z + O(z^2)$ telle que $\psi(f(z)) = \lambda\psi(z)$.

(4) Montrer qu'il existe une et une seule série formelle $h(T) = T + O(T^2)$ vérifiant $\psi(f(z)) = \lambda\psi(z)$.